

## №Урока 19-20

### Тема урока: Использование прогрессии для решения прикладных задач.

#### Теоретическая часть.

Термин “прогрессия” был введен римским автором Боэцием еще в IV в. н.э. От латинского слова *progressio* – “движение вперед”. Первые представления об арифметической прогрессии были еще у древних народов. В клинописных вавилонских табличках и египетских папирусах встречаются задачи на прогрессии и указания как их решать. Так встречается старинная задача о делении хлеба, которая записана в знаменитом египетском папирусе Ринда. Папирус этот, разысканный Риндом полвека назад, составлен около 2000 лет до нашей эры и является списком с другого, еще более древнего математического сочинения, относящегося, быть может, к третьему тысячелетию до нашей эры.

Задача о делении хлеба. Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

Решение:

Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член  $x$ , разность  $y$ . Тогда

доля первого  $x$ , доля второго  $x + y$ , доля третьего  $x + 2y$ , доля четвертого  $x + 3y$ , доля пятого  $x + 4y$ .

На основании условий задачи составляем следующие два уравнения:

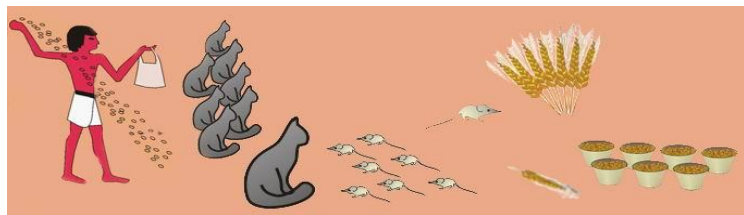
$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100, \\ 7[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y). \end{cases}$$

После упрощений система принимает вид

$$\begin{cases} x + 2y = 20, \\ 11x = 2y. \end{cases} \text{ Решив эту систему, получаем: } x = \frac{5}{3}, y = \frac{55}{6}. \text{ Значит, хлеб должен быть}$$

разделен на следующие части  $1\frac{2}{3}, 10\frac{5}{6}, 20, 29\frac{1}{6}, 38\frac{1}{3}$ .

Уже в Древнем Египте знали не только арифметическую, но и геометрическую



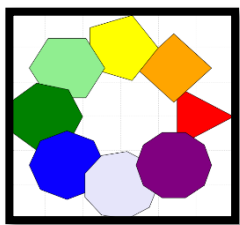
прогрессию. Вот, например, задача из папируса Райнда: «У семи лиц по семи кошек; каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из каждого колоса может

вырасти по семь мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?»

Решение: числа 7, 49, 343, 2401, 16807, 117649 представляют геометрическую прогрессию, первый член  $b_1 = 7$  и знаменатель прогрессии  $q = 7$ . Тогда, используя формулу  $n$ -го члена прогрессии  $b_n = b_1 q^{n-1}$ , находим  $b_6 = 7 \cdot 7^{6-1} = 7 \cdot 7^5 = 7^6 = 117649$ . По формуле суммы  $n$  - первых членов геометрической прогрессии:  $S_n = (b_1(q^n - 1)) / (q - 1)$ , находим  $S_6 = \frac{7(7^6 - 1)}{7 - 1} = \frac{7((117649 - 1))}{6} = 137256$ .

### Практическая часть

Задача. Числа градусов, содержащихся в последовательных внутренних углах некоторого многоугольника, составляют прогрессию, разность которой 10; наименьший угол этого многоугольника  $100^\circ$ . Сколько в многоугольнике сторон?



Решение.  $S_n = (2a_1 + d(n-1)) \cdot n : 2 = (200 + 10(n-1)) \cdot n : 2 = 5n^2 + 95n$ . Сумма внутренних углов многоугольника находится по формуле, известной из геометрии:  $(n-2) \cdot 180$ .

$$5n^2 + 95n = 180n - 360;$$

$$5n^2 - 85n + 360 = 0;$$

$$n^2 - 17n + 72 = 0;$$

$$n = 8, \quad n = 9.$$

Существует два многоугольника, удовлетворяющих условию задачи: восьмиугольник и девятиугольник

Задача. При свободном падении тело прошло в первую секунду 5м, а в каждую следующую на 10м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло его дна через 5 с. после начала падения.

Решение. В первую секунду 5м,

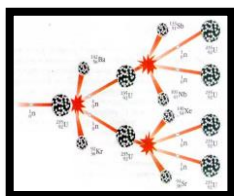
во вторую секунду 15м,

в третью секунду 25м,

в четвертую секунду 35м,

в пятую секунду 45м.

Всего за пять секунд  $5 + 15 + 25 + 35 + 45 = 125$ (м). А используя формулу суммы  $n$ -ых членов арифметической прогрессии, вычисляем одним действием:  $S_5 = \frac{2 \cdot 5 + 10 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 125$ (м)



Ответ: глубина шахты 125м.

Деление ядер урана происходит с помощью нейтронов. Нейтрон, ударяя по ядру урана раскалывает его на две части. Получается два нейтрона. Затем два нейтрона, ударяя по двум ядрам, раскалывают их еще на 4 части и т.д. — это геометрическая прогрессия.

Задача. Амфитеатр состоит из 10 рядов, причем в каждом следующем ряду на 20 мест больше, чем в предыдущем, а в последнем ряду 280 мест. Сколько человек вмещает амфитеатр?

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$280 = a_1 + 20 \cdot 9,$$

$$\text{откуда } a_1 = 100,$$

$$\text{тогда } S_{10} = \frac{100 + 280}{2} \cdot 10 = 1900$$

Ответ: 1900

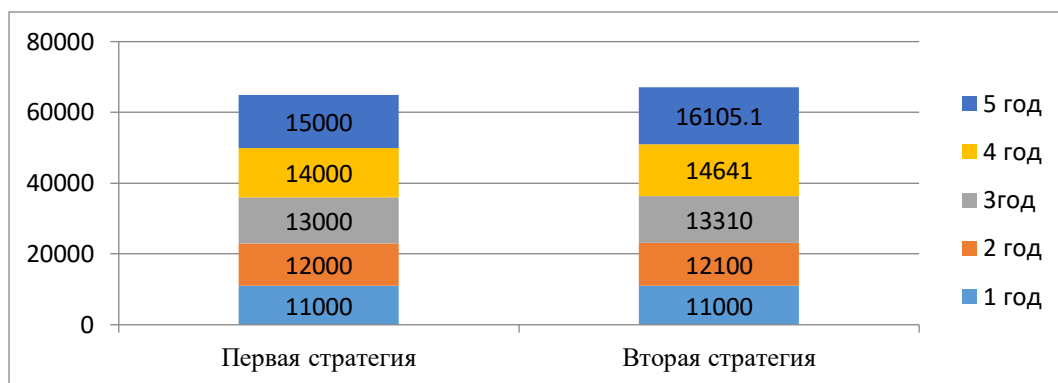
Рассмотрим, как применяются наши знания в жизнедеятельности людей. Представьте себе, что вы открыли в банке вклад на  $a$  рублей под  $r\%$  годовых на  $n$  лет. У вас есть 2 стратегии поведения: либо в конце каждого года хранения вклада снимать проценты по вкладу, то есть полученную прибыль в размере  $\frac{ra}{100}$  тенге, либо прийти в банк 1 раз – в конце срока хранения вклада. Какой доход вы получите в том и другом случаях?

Рассмотрим конкретный пример: пусть вклад составляет 10000 рублей, банк дает 10% годовых, срок хранения вклада - 5 лет. Какую сумму денег мы получим в конце срока хранения, если выберем первую стратегию и вторую стратегию?

-А теперь вычислим эту сумму по программе, как это делают сотрудники банка(программа заранее разработана).

	1 год	2 год	3 год	4 год	5 год
Первая стратегия	11000	12000	13000	14000	150 00
Вторая стратегия	11000	12100	13310	14641	161 05,1

Разница в конечных сумма превышает во второй стратегии на 1105,1



Вывод: выгоднее вторая стратегия, где начисление проводится по формуле сложных процентов.

Задача № 1. У вас образовалась прибыль в размере 100000 рублей. Есть три банка, в которые можно вложить деньги: 1-й банк – простые проценты из расчета 3% в месяц, 2-й банк – под простые проценты из расчета 40% в год, 3-й банк – под сложные проценты из расчета 30% в год. Мы хотим положить деньги на три года или пять лет. В каком банке это наиболее выгодно?

Решение: первый и второй банк работают по простым процентам (арифметическая прогрессия), а вот третий банк по сложным (по геометрической прогрессии):

I банк	II банк	III банк
Первоначальный взнос 100 000 рублей		
30% годовых (простые проценты)	40% годовых (простые проценты)	30% годовых (сложные проценты)
Через три года		
$S_3 = 100000 \left(1 + \frac{30 \cdot 3}{100}\right)$ $= 190000$	$S_3 = 100000 \left(1 + \frac{40 \cdot 3}{100}\right)$ $= 220000$	$S_3 = 100000 \left(1 + \frac{30}{100}\right)^3$ $= 219700$
Вывод: на три года выгоднее положить во второй банк		
$S_5 = 100000 \left(1 + \frac{30 \cdot 5}{100}\right)$ $= 250000$	$S_5 = 100000 \left(1 + \frac{40 \cdot 5}{100}\right)$ $= 300000$	$S_5 = 100000 \left(1 + \frac{30}{100}\right)^5$ $= 371293$
Вывод: на пять лет выгоднее положить в третий банк		

Задача 2. Два товарища поспорили о том, что река должна покрыться льдом не ранее 20 декабря. Они условились, что если река покроется ледяным покровом раньше, то первый из них платит, а если позже, то получает за первый день 1 рубль, а за каждый последующий

день в 1,5 раза больше. Река покрылась льдом 12 декабря. Сколько заплатит первый? (ответ дайте в рублях, округлив до единиц)

Решение: 1 день-1 рубль, 2 день-1·1,5 рублей, 3 день-1·1,5·1,5рублей. Получаем геометрическую прогрессию, где  $b_1=1$ ;  $q=1,5$ .

Соответствие дней и членов геометрической прогрессии следующее:

12 декабря- $b_1$  , 13 декабря- $b_2$  ,..., 19 декабря- $b_8$  . Получилось  $n = 8$ .

Применим формулу суммы и посчитаем  $S_8$ :  $S_8 = 1 \cdot (1,5^8 - 1) / (1,5 - 1) = 49,26 \approx 49$  (тг)

Ответ: 49 рублей

Прогрессии в хозяйстве

Убеждения в том, что задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, также как и многие другие знания по математике, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и другими, говорят о том, что с можно решить много задач с помощью формул арифметической и геометрической прогрессии. Многие жизненно-важные процессы в физике, биологии, медицине протекают по законам прогрессии. Исследование алгоритмов решения задач литературного, исторического и практического содержания действительно показывает, что чаще всего рациональный и эффективный способ решения основан на применении прогрессий и их свойств. Заметили, что арифметическая прогрессия в практических задачах встречается чаще геометрической. Исследования показали, что интенсивное размножение бактерий в геометрической прогрессии широко применяется в пищевой промышленности, в фармакологии, в медицине, в сельском и коммунальном хозяйствах. В банковских расчетах (начисление простых и сложных процентов) без знания прогрессии невозможно. А значит, мы убедились в большой практической значимости таких понятий, как арифметическая и геометрическая прогрессии. Увидели, как применяются прогрессии в жизни людей, научились легко и быстро вычислять необходимые компоненты реальных ситуаций, испробовали себя в роли сотрудников банка. Итак, делаем вывод:

В нашей жизни многое очевидно с помощью математики, в частности, арифметической и геометрической прогрессий. Для того, чтобы не попадать в неудачные ситуации, надо остановиться и подумать можно ли предугадать результат.

### **Домашнее задание.**

1. Первый член арифметической прогрессии равен 18, а третий член равен -7. Найдите разность этой прогрессии.

2. Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

...; -5; x; -80; -320. Найдите член прогрессии обозначенный буквой x?